Ontem:
- $S^{-1}(\cdot) = S^{-1}R \otimes \cdot$
- $S^{-1}(\cdot)$ preserva limites directos e monomorfismo

Teorema: O functor $S^{-1}(\cdot)$ é exacto.

Dem: $S^{-1}(\cdot)$ preserva limites directos e monomorfismos.

$\square$

NB: Um conjunto mult. S pode ser visto como uma categoria cujos são elementos de S e

$$\mathrm{Hom}(x,t) = \{ s \in S \mid xs = t \}$$

e M pode ser visto como functor

$S \to R\text{-mod}$; $x \longmapsto M_x := M$

que envia $s \in \mathrm{Hom}(x,t)$ em $\mu_s : M_x \to M_t$

Dados $x, t \in S$ $\quad x \xrightarrow{t} xt$ e $t \xrightarrow{x} xt$;

dados $\quad x \underset{s'}{\overset{s}{\rightrightarrows}} t \overset{x}{\dashrightarrow} u = xt$, temos

$$xs = xs'$$

$\therefore$ S com esta estrutura é cat. filtrada, logo o functor $M \mapsto \varinjlim_{S} M$ é exato

Exercício: $\varinjlim_{S} M = S^{-1}M$

Cor: $S^{-1}R \in R\text{-mod}$ é plano.

Cor: Sejam $M \in R\text{-mod}$ e $\mathfrak{a} \subset R$ ideal. Temos

$$S^{-1}(M/\mathfrak{a}M) = S^{-1}M/S^{-1}\mathfrak{a}M$$
$$= S^{-1}M/\mathfrak{a}S^{-1}M$$

Cor: Se $\mathfrak{p} \subset R$ é ideal primo

$$\operatorname{Frac}(R/\mathfrak{p}) = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}.$$

Dem: $\operatorname{Frac}(R/\mathfrak{p}) = (R/\mathfrak{p} - 0)^{-1} R/\mathfrak{p}$

$$= (R - \mathfrak{p})^{-1}(R/\mathfrak{p})$$
$$= S_{\mathfrak{p}}^{-1}(R/\mathfrak{p}) = S_{\mathfrak{p}}^{-1}R/S_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{p}$$
$$= R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}.$$

$\boxtimes$

Exercício: $M \in R\text{-mod}$. Temos

(1) $S^{-1}\mathrm{Ann}(M) \subset \mathrm{Ann}(S^{-1}M)$

com $=$ se M é f.g.

(2) $S^{-1}M = 0$ se $S \cap \mathrm{Ann}(M) \neq \emptyset$; reciprocamente se M é f.g.

Dem: (1) $\subset$ é clara. Suponhamos que $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ e seja $\frac{r}{s} \in \mathrm{Ann}(S^{-1}M)$. Temos

$$\frac{r}{s} m_i = 0 \iff \exists\, s_i \in S : r s_i m_i = 0 \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \frac{r}{s} = \frac{\overbrace{r s_1 \cdots s_n}^{\in \mathrm{Ann}(M)}}{s s_1 \cdots s_n}$$

2) Mostremos a recíproca: seja $M=\langle m_1,\dots,m_n\rangle$ tq. $S^{-1}M=0$

Temos $S^{-1}M=0 \iff \mathrm{Ann}(S^{-1}M)=S^{-1}R$

$$\iff S^{-1}\mathrm{Ann}(M)=S^{-1}R$$

M f.g.

$$\iff S^{-1}\cap\mathrm{Ann}(M)\neq\emptyset.$$

$\blacksquare$

Prop: Seja $M\in R$-mod, S mult. Temos

1) Dados $m_1,\dots,m_n\in M$, se M é f.g. $\langle \frac{m_1}{1},\dots,\frac{m_n}{1}\rangle=S^{-1}M$

$\Rightarrow \exists f\in S$ tq.

$$\langle \frac{m_1}{1},\dots,\frac{m_n}{1}\rangle=M_f$$

(2) Se M é f.a. e $S^{-1}M$ é livre em $S^{-1}R$-mod com caract. n, então $\exists f \in S$ t.q. M_f é livre de caract. n em R_f-mod.

Dem: (1) $N := \langle m_1, \dots, m_n \rangle$.

$S^{-1}N = S^{-1}M \iff S^{-1}M / S^{-1}N = 0 \iff S^{-1}(M/N) = 0$.

$\iff \exists f \in S \cap \mathrm{Ann}\left(\frac{M}{N}\right)$

M f.g.

$\Rightarrow S_f^{-1}(M/N) = 0$

$\iff S_f^{-1}M / S_f^{-1}N = 0$

$\iff \langle \frac{m_1}{1}, \dots, \frac{m_n}{1} \rangle = M_f$

(2) Seja $\{ \frac{m_i}{1} \mid i=1,\dots,n \}$ base para $S^{-1}M$. Se M é f.g.

$(1) \Rightarrow \exists f \in S : \langle \frac{m_1}{1}, \dots, \frac{m_n}{1} \rangle = M_f$

Consideremos a sucessão exacta

$$0 \to K_f \to R_f^n \xrightarrow{\alpha_f} M_f \to 0$$

Temos tb uma suc. exacta da forma

$$0 \to L \to R^m \longrightarrow M \to 0$$

com L é f.g.

$\Rightarrow \quad 0 \to L_f \to R_f^m \to M_f \to 0$

é exacta

$\Rightarrow$ lemma Schanuel $R^u_f \oplus L_f = R^n_f \oplus K_f$

$\Rightarrow K_f$ é f.g.

Temos $S^{-1} K_f = 0$, logo, como K_f é f.g. $\exists\, g \in S$ t.q.

$$(K_f)_g = 0$$

$\therefore$ Fazendo $h = fg$, vem

$\{ \frac{m_i}{1} \mid i = 1, \ldots, n \}$ é

base para M_h. $\square$

Prop: Sejam $M, N \in R$-mod, então existe um homomorfismo canônico:

$$\sigma : S^{-1}\mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

tq. σ é 1-1 se M é f.g. e σ é iso. se M é f.a.

Dem: $S^{-1}\mathrm{Hom}_R(M,N) = \mathrm{Hom}_R(M,N) \otimes_R R'$

com $R' = S^{-1}R$

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(S^{-1}M, S^{-1}N) =$$

$$= \mathrm{Hom}_{R'}(M \otimes_R R', N \otimes R')$$

Segue dos resultados para produtos tensoriais.

$\square$

Exemplo: Sejam $R = \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$,

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/\langle p^n \rangle$$

$S = \{ p^n \mid n \in \mathbb{N} \}$. Temos $S^{-1}\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}\overset{\overset{1_M}{\rotatebox{90}{$\in$}}}{M}$ $\neq 0$ pois $p^n 1_M \neq 0$ $\forall n$, mas $S^{-1}M = M_p = 0$, logo σ ñ 1-1.

$\square$

Nilpotentes: $M \in R\text{-mod}$, $x \in R$, $m \in M$

Def: Diz-se que x é nilpotente em M se $\exists n \in \mathbb{N}$ t.q. $\mu_{x^n} = 0$ em $\mathrm{End}_R M$; ou seja

$$x \in \sqrt{\mathrm{Ann}(M)}$$

Notação: $\sqrt{\mathrm{Ann}(M)} =: \mathrm{nil}(M)$

NB: $\mathfrak{a} \subset R$ ideal $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathrm{nil}(R/\mathfrak{a})$.

Prop: Sejam $S \subset R$ mult. e $Q \subset M$ submódulo. Seja $\mathfrak{a} := \mathrm{nil}(M/Q)$ então $S \cap \mathfrak{a} \neq \emptyset$, temos

$$Q^S = M \text{ e } S^{-1}Q = S^{-1}M.$$

Dem: seja $s \in S \cap \mathfrak{a}$. Então

$\exists n : s^n \in \mathrm{Ann}(M/Q)$

$\Rightarrow S^{-1}\left(\frac{M}{Q}\right) = 0$

- $S^{-1}(M/Q) = 0 \iff S^{-1}M / S^{-1}Q = 0$

  $\iff S^{-1}M = S^{-1}Q.$

- $S^{-1}(M/Q) = 0 \iff$

$\ker\left(\varphi_S : \frac{M}{Q} \to S^{-1}\left(\frac{M}{Q}\right)\right) = \frac{M}{Q}$

$\Rightarrow 0^S = \frac{M}{Q} = Q^S = M$

$\square$

Espectro de um Anel R

Def: $\operatorname{Spec} R = \{ \mathfrak{p} \subset R \mid \mathfrak{p}$ é ideal primo $\}$

Dado $\mathfrak{a} \subset R$ ideal, define-se

$$V(\mathfrak{a}) = \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p} \}$$

Exemplos: 1. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{ \langle p \rangle \mid p \in \mathbb{N}$ é primo $\}$

$\cup \{ \langle 0 \rangle \}$.

2. $\operatorname{Spec} K = \{ \langle 0 \rangle \}$, K corpo.

3. $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x] = \{ \langle x-a \rangle \mid a \in \mathbb{C} \} \cup \{0\}$

$= \mathbb{C} \cup \{ \langle 0 \rangle \}$

4 - $\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x] = \{\langle x-a\rangle \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\langle 0\rangle\}$
$\cup \{(x-a)(x-\bar{a}) \mid a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\}$

<u>Propiedades de $V(\cdot)$</u>:

(1) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \implies V(\mathfrak{a}) \supset V(\mathfrak{b})$

(2) $\bigcap_i V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_i \mathfrak{a}_i\right)$

(3) $\bigcup_{i=1}^{n} V(\mathfrak{a}_i) = V(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n)$
$= V(\mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_n)$

(4) $\operatorname{Spec} R = V(\langle 0 \rangle)$

(5) $\emptyset = V(R)$

(6) $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \iff \sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$

em particular $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$

Dem: $V(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n) = V(\mathfrak{a}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{a}_n)$

Temos $V(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n) \supset V(\mathfrak{a}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{a}_n)$

por outro lado,

$$V(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n) = \bigcup_{i=1}^{n} V(\mathfrak{a}_i)$$

$$\Rightarrow V(\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n) \subset V(\mathfrak{a}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{a}_n)$$

$\square$

Notação: $V(f_1, \dots, f_n) := V(\langle f_1, \dots, f_n \rangle)$

Def: A topologia de Zariski em $\operatorname{Spec} R$ é aquela cujos os fechados são $V(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \subset R$ ideal.

Exemplo: $\operatorname{spec} \mathbb{C}[x] = \mathbb{C} \cup \{\langle 0 \rangle\}$

Quem são os fechados em $\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]$?

$\mathfrak{a} \subset \mathbb{C}[x]$ ideal

$\Rightarrow \mathfrak{a} = \langle f(x) \rangle \quad , f(x) \in \mathbb{C}[x]$

$= \langle (x-a_1) \cdots (x-a_n) \rangle$

ou $\mathfrak{a} = \langle 0 \rangle$ ou $\mathfrak{a} = \langle 1 \rangle$

$V(\langle (x-a_1), \ldots (x-a_n) \rangle)$

$= \{ \langle x-a_i \rangle \mid i = 1, \ldots, n \}$

Def: Seja $f \in R$. Definimos

$D(f) := \operatorname{spec} R - V(f)$

é um conjunto aberto (dito distinguido)

Prop: $\{ D(f) \mid f \in R \}$ formam uma base da top. de Zariski

Dem: $X \subset \operatorname{Spec} R$ um aberto

$\iff$ $\operatorname{Spec} R - X = V(\mathfrak{a})$ com $\mathfrak{a} \subset R$ ideal.

$$\iff X = \operatorname{Spec} R - V(\mathfrak{a})$$

$$= \operatorname{Spec} R - V(\langle \{f_i\} \rangle)$$

$$= \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \{f_i\} \not\subset \mathfrak{p} \}$$

$$= \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \exists j : f_j \notin \mathfrak{p} \}$$

$$= \bigcup_j D(f_j)$$

$\square$

NB: $R \longmapsto \operatorname{Spec} R$ é functor contravariante $\mathrm{CRings} \to \mathrm{Top}$

dado $\alpha \in \operatorname{Hom}(R, R')$

$$\begin{aligned} \operatorname{spec}(\alpha) : \operatorname{Spec} R' &\to \operatorname{Spec} R \\ \mathfrak{p}' &\longmapsto \alpha^{-1}\mathfrak{p}' \end{aligned}$$

temos $$\operatorname{spec}(\alpha)^{-1}\big(V(\mathfrak{a})\big) = V(\mathfrak{a}R')$$

logo $\operatorname{spec}(\alpha)$ é contínua.

Exemplo: $R' = R/\mathfrak{a}$; $\kappa : R \twoheadrightarrow R'$

$$\begin{tikzcd} \Rightarrow \operatorname{spec}(\kappa) : & \operatorname{Spec} R' \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \operatorname{Spec} R \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\ & V(\mathfrak{a}) \arrow[r, hook] & \operatorname{Spec} R \end{tikzcd}$$

Prop: Spec R é quasi-compacto, i.e.,

se Spec R $= \bigcup_{\lambda} X_\lambda$, t.q. X_λ é

aberto $\forall \lambda$, então $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ t.q.

$$\operatorname{Spec} R = \bigcup_{i=1}^{n} X_{\lambda_i}.$$